QED 5–10

Matematikk for grunnskolelærerutdanningen

Bind 2

Fasit kapittel 3 – Geometri

CAPPELEN DAMM AKADEMISK

Kapittel 3

Oppgave 1

a) $(1+3, 2+7) = (4, 9)$
b) $(0-1, -4+5) = (-1, 1)$
c) $(-2+0, 3+6) = (-2, 9)$

Oppgave 2

a) Vi får vektoren $[4, 2]$.
b) Vi får opp samme vektor $[4, 2]$, men med startpunkt i C.
c) Vi får at $\mathbf{z} = [1, 4]$. Dette forklares ved at en forflytning langs $\mathbf{u} = [4, 2]$ pluss en forflytning langs $\mathbf{w} = [-3, 2]$ tilsvarer totalt sett en forflytning $4 - 3 = 1$ langs x-aksen og $2 + 2 = 4$ langs y-aksen.
d) $\mathbf{z}$ går fra punk A til punkt D. Vektorsummen $\mathbf{u} + \mathbf{w}$ tilsvarer en forflytning først fra A til B, og deretter fra B til D.
e) Vi får opp vektoren $\mathbf{b} = [-2, 2]$.
f) Vektoren går fra C' til E. Dette forklares med at $\mathbf{a} - \mathbf{v}$ kan forstås som «det som må adderes med $\mathbf{v}$ for å få $\mathbf{a}$. Vi ser i dette tilfellet fra figuren at $\mathbf{v} + \mathbf{b} = \mathbf{a}$.
g) En differanse $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ kan finnes ved å plassere de to vektorene $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ slik at de får samme startpunkt, og så trekke en vektor fra endepunktet for $\mathbf{y}$ til endepunktet for $\mathbf{x}$.

Oppgave 3

a) Praktisk utførelse.
b) Hvis $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{BC}$ er gitt som hhv. $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ i programmet, finner man $\overrightarrow{AC}$ ved å skrive inn f.eks. $\mathbf{a} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ i algebrafeltet. Tilsvarende for $\overrightarrow{BD}$.
c) Vektoren kalles for *nullvektoren*. Den er gitt som en forflytning 0 langs x-aksen og 0 langs y-aksen.
d) Andre måter: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \mathbf{0}$ og $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA} = \mathbf{0}$. I tillegg kan man selvsagt ta $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} = \mathbf{0}$ og tilsvarende med alle andre vektorer. Man har også $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \mathbf{0}$.

Oppgave 4

a) Her er det feil i figuren i boken. Det var meningen at $\mathbf{v}$ skulle være lik $[1, -2]$, og ikke slik den forekommer nå (på formen $[0{,}5\ , -2]$). Ingen av vektorene er skalarmultipler av $\mathbf{v}$ slik de fremstilles på figuren nå. Men hvis $\mathbf{v}$ var lik $[1, -2]$, ville det vært 2., 3., 6. og 7. vektor (når vi teller fra venstre) som var skalarmultipler av $\mathbf{v}$.
b) Hvis vi hadde at $\mathbf{v}$ var lik $[1, -2]$, ville den andre vektoren vært $2\mathbf{v}$, den tredje ville vært $-3\mathbf{v}$, den sjette ville vært $2{,}5\mathbf{v}$, og den syvende ville vært $0{,}5\mathbf{v}$.

Oppgave 5

a) $\overrightarrow{AB} = [4-1, 7-2] = [3, 5]$.
b) $\overrightarrow{AB} = [-1-(-3), 5-0] = [2, 5]$.
c) $\overrightarrow{AB} = [-3-(-1),\ -6-2] = [-2, -8]$.

Oppgave 6

a) Vi får henholdsvis $[-3, -5]$, $[-2, -5]$ og $[2, 8]$. Fortegnene er altså snudd.
b) Regneregel: $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$. Grunnen er at vi vet at $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \mathbf{0}$. Utfra aksiom 4 følger det da at $\overrightarrow{BA}$ må være lik $-\overrightarrow{AB}$.

Oppgave 7

a) Vi får akkurat de samme vektorene, $\overrightarrow{AB}$, som i oppgave 5. Setning 1 forteller oss at hvis O er et vilkårlig punkt, da er $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$. Det følger da at vi også får f.eks. at $\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{AB}$.
b) Hvis vi lar A og B være som i oppgave 5 a), får vi at $\overrightarrow{QB} = [4-x, 7-y]$ og $\overrightarrow{QA} = [1-x, 2-y]$. Det følger da at $\overrightarrow{QB} - \overrightarrow{QA} = [4-x-(1-x), 7-y-(2-y)] = [3, 5] = \overrightarrow{AB}$. Tilsvarende for oppgave 5 b) og 5 c).

Oppgave 8

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = [1, 3] - [5, 1] = [-4, 2]$. Tilsvarende er $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = [5, 1] - [1, 3] = [4, -2]$.

Oppgave 9

Merk at x-aksen er der vi har y-koordinat 0.

a) $a = 3$, siden endepunktet da blir $\big(0 + 3 \cdot 1,\ 3 + 3 \cdot (-1)\big) = (3, 0)$.
b) $a = 2$, siden endepunktet da blir $\big(5 + 2 \cdot 2,\ 6 + 2 \cdot (-3)\big) = (9, 0)$,
c) $a = 5$, siden endepunktet da blir $(3 + 5 \cdot 0,\ -10 + 5 \cdot 2) = (3, 0)$.
d) $a = -3$, siden endepunktet da blir $(3 - 3 \cdot 6,\ 3 - 3 \cdot 1) = (-15, 0)$.
e) $a = -4$, siden endepunktet da blir $(-5 + 4 \cdot 7,\ -8 + 4 \cdot 2) = (23, 0)$.

Oppgave 10

Merk at punktene langs linjen $y = 2x$ kan tenkes på som alle punkter hvor y-koordinaten er det dobbelte av x-koordinaten.

a) Endepunktet skal bli $(-4 + 2a,\ 1 + 0a) = (-4 + 2a,\ 1)$ slik at y-koordinaten er det dobbelte av x-koordinaten, altså slik at $2 \cdot (-4 + 2a) = 1$, hvilket gir $-8 + 4a = 1$. Det følger at $a = \frac{9}{4}$.

b) Endepunktet skal bli $(3+0a, -2+4a) = (3, -2+4a)$ slik at $2 \cdot 3 = -2+4a$. Det følger at $a = 2$.
c) Endepunktet skal bli $(5+a,\ 4+8a)$ slik at $2 \cdot (5+a) = 4+8a$, hvilket gir $10 + 2a = 4 + 8a$. Det følger at $a = 1$.
d) Endepunktet skal bli $(1-a,\ 10+a)$ slik at $2 \cdot (1-a) = 10+a$, hvilket gir $2 - 2a = 10 + a$. Det følger at $a = -\frac{8}{3}$.

Oppgave 11

I slutten av oppgaveteksten skal det stå «...til å vise at x og y må være 0».

Vi løser det slik: Vi vet at $\mathbf{u} - \mathbf{u} = \mathbf{0}$. Siden $\mathbf{u} = [a, b]$, og vi har satt $\mathbf{0} = [x, y]$, gir dette oss at $[a, b] - [a, b] = [x, y]$, altså at $[a - a,\ b - b] = [x, y]$. Det følger at $[x, y] = [0, 0]$. Altså er $\mathbf{0} = [0, 0]$.

Oppgave 12

a) $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) = \frac{1}{2}([1,3] + [3,7]) = \frac{1}{2}[4,10] = [2,5]$.
b) $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) = \frac{1}{2}([2,5] + [2,9]) = \frac{1}{2}[4,14] = [2,7]$.
c) $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) = \frac{1}{2}([1,0] + [-2,1]) = \frac{1}{2}[-1,1] = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Oppgave 13

a) Punktene der A kan befinne seg, danner en sirkel med radius 1 og sentrum i O.
b) Punktene der A kan befinne seg, danner en sirkel med radius 1 og sentrum i O.
c) Punktene der A kan befinne seg, danner en sirkel med radius 1 og sentrum i O.
d) Punktene der A kan befinne seg, danner en sirkel med radius 2 og sentrum i O.
e) Punktene der A kan befinne seg, danner en sirkel med radius r og sentrum i O.

Oppgave 14

a) $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ må være parallelle med hverandre og peke i samme retning for at $|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$ skal være lik $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$.
b) Hvis vi ser for oss en sirkel med sentrum i startpunktet til $\mathbf{a}$ og med radius $|\mathbf{a}|$, kan vi velge $\mathbf{b}$ slik at startpunktet er i endepunktet til $\mathbf{a}$, og der endepunktet for $\mathbf{b}$ er hvor som helst inni sirkelen.
c) Tegn opp en sirkel igjen, med sentrum i startpunktet til $\mathbf{a}$ og radius $|\mathbf{a}|$. Hvis $\mathbf{b}$ velges slik at det går fra endepunktet til $\mathbf{a}$ til et hvilket som helst punkt på sirkelen, får vi at $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}|$.

Oppgave 15

La $C = (x, y)$. Da er $\overrightarrow{CA} = [x-2, y-1]$. Setning 7 gir at $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$. Vi har $\overrightarrow{AB} = [2, -1]$, slik at vi får ligningen $[x-2, y-1] \cdot [2, -1] = 2(x-2) - (y-1) = 0$, hvilket gir oss $2x - y - 3 = 0$. Siden punkt C ligger på linjen $y = -2x + 8$, kan vi sette inn for y og få $2x - (-2x + 8) - 3 = 0$, hvilket gir oss $4x = 11$, og dermed $x = \frac{11}{4}$. Vi får videre at $y = -2 \cdot \frac{11}{4} + 8 = \frac{5}{2}$. Altså er $C = \left(\frac{11}{4}, \frac{5}{2}\right)$.

Oppgave 16

a) $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{[2{,}1,\ 2{,}1]\cdot[1{,}7,\ 0]}{\sqrt{2{,}1^2+2{,}1^2}\cdot 1{,}7}\right) \approx \cos^{-1}\left(\frac{2{,}1\cdot 1{,}7}{\sqrt{2}\cdot 2{,}1\cdot 1{,}7}\right) = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} = 45°$.

b) $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{[0,\ 3{,}17]\cdot[4{,}96,\ 0]}{3{,}17\cdot 4{,}96}\right) = \cos^{-1}(0) = 90°$.

c) $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{[0,\ 6{,}71]\cdot[5{,}32,\ 0]}{6{,}71\cdot 5{,}32}\right) = \cos^{-1}(0) = 90°$.

d) $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{[1,\ -1{,}6]\cdot[3{,}5,\ 1]}{\sqrt{1+1{,}6^2}\cdot\sqrt{3{,}5^2+1}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{3{,}5-1{,}6}{\sqrt{1+1{,}6^2}\cdot\sqrt{3{,}5^2+1}}\right) \approx 73{,}9°$.

e) $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{[-3{,}1,\ 1]\cdot[-5{,}2,\ -1]}{\sqrt{3{,}1^2+1}\cdot\sqrt{5{,}2^2+1}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{3{,}1\cdot 5{,}2-1}{\sqrt{3{,}1^2+1}\cdot\sqrt{5{,}2^2+1}}\right) \approx 28{,}8°$.

f) $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{[-3,\ 5]\cdot[7{,}3,\ 1{,}2]}{\sqrt{9+25}\cdot\sqrt{7{,}3^2+1{,}2^2}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-3\cdot 7{,}3+5\cdot 1{,}2}{\sqrt{34}\cdot\sqrt{7{,}3^2+1{,}2^2}}\right) \approx 111{,}6°$

g) $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{[-4,\ -1]\cdot[1,\ 0]}{\sqrt{16+1}\cdot 1}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-4}{\sqrt{17}}\right) \approx 166{,}0°$. Vi ser på figuren at dette stemmer.

Oppgave 17

Vi lar $\overrightarrow{AD} = [s, t]$.

a) $[2, 6] \cdot [s, t] = 2s + 6t = 0$. Setter $[s', t'] = [6, -2]$, som har lengde $\sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40}$. Vektoren $[s, t]$ skal ha lengde $\frac{1}{4}\sqrt{2^2 + 6^2} = \frac{1}{4}\sqrt{40}$. Altså må enten $[s, t] = \frac{1}{4}[s', t'] = \left[\frac{6}{4}, -\frac{2}{4}\right] = \left[\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right]$ eller $[s, t] = -\frac{1}{4}[s', t'] = \left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Fordi $ABCD$ går i positiv omløpsretning og $\overrightarrow{AB} = [2, 6]$, da konkluderer vi med at $\overrightarrow{AD} = \left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

b) $[-1, 3] \cdot [s, t] = -s + 3t = 0$. Setter $[s', t'] = [3, 1]$, som har lengde $\sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$. Vektoren $[s, t]$ skal ha lengde $2\sqrt{1 + 9} = 2\sqrt{10}$. Altså må enten $[s, t] = 2[s', t'] = 2[3, 1] = [6, 2]$ eller $[s, t] = -2[s', t'] = [-6, -2]$. Siden $\overrightarrow{AB} = [-1, 3]$ og $ABCD$ går i positiv omløpsretning, konkluderer vi med at $\overrightarrow{AD} = [-6, -2]$.

c) $[-2, -8] \cdot [s, t] = -2s - 8t = 0$. Kunne her satt $[s', t'] = [8, -2]$, men det blir enklere å sette $[s', t'] = [4, -1]$. Denne har lengde $\sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$. Vektoren $[s, t]$ skal ha lengde $\frac{1}{2}\sqrt{4 + 64} = \frac{1}{2}\sqrt{68} = \sqrt{17}$, så vi kan her sette $[s', t'] = [8, -2] = [s, t]$ eller $-[s', t'] = [-8, 2] = [s, t]$. Fordi $\overrightarrow{AB} = [-2, -8]$, konkluderer vi med at $[s, t] = [8, -2]$.

ppgave 18

La den ukjente vektoren være $\mathbf{x} = [s, t]$. Siden $\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = [2, 7] \cdot [\mathrm{s}, \mathrm{t}] = 2s + 7t = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{x}| \cdot \cos(60°) = \sqrt{2^2 + 7^2} \cdot |\mathbf{x}| \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}|\mathbf{x}|\sqrt{53}$, ser vi at ligningen vi får blir mye mer håndterlig hvis vi lar $\mathbf{x}$ ha samme lengde som $\mathbf{u}$, dvs. $|\mathbf{x}| = \sqrt{53}$. Da får vi ligningen $2s + 7t = 26{,}5$.

Den andre ligningen blir $\sqrt{s^2 + t^2} = \sqrt{26{,}5}$, altså $s^2 + t^2 = 26{,}5$.

Den første ligningen gir oss $s = -3{,}5t + 13{,}25$. Vi setter inn i den andre ligningen og får $12{,}25t^2 - 92{,}75t + 175{,}5625 + t^2 = 26{,}5$. (Merk at vi i akkurat denne oppgaven ikke er tjent med å avrunde, siden løsningen for t ender opp med å bli et ganske pent tall.)

Vi slår sammen, får $13{,}25t^2 - 92{,}75t + 149{,}0625 = 0$, og andregradsformelen gir da $t = \frac{92{,}75 \pm \sqrt{92{,}75^2 - 4 \cdot 13{,}25 \cdot 149{,}0625}}{2 \cdot 13{,}25}$, dvs. $t = 4{,}5$ eller $t = 2{,}5$.

Hvis $t = 4{,}5$, gir første ligning oss at $s = -3{,}5 \cdot 4{,}5 + 13{,}25 = -2{,}5$; og hvis $t = 2{,}5$, gir første ligning oss at $s = -3{,}5 \cdot 2{,}5 + 13{,}25 = 4{,}5$.

Altså er $\mathbf{x} = [-2{,}5,\ 4{,}5]$ eller $\mathbf{x} = [4{,}5,\ 2{,}5]$.

Oppgave 19

a) La $\mathbf{a} = [x, y]$. Da er $r\mathbf{a} = [rx, ry]$, og fra setning 3 følger det at $|r\mathbf{a}| = \sqrt{(rx)^2 + (ry)^2} = \sqrt{r^2(x^2 + y^2)} = \sqrt{r^2}\sqrt{x^2 + y^2} = |r| \cdot |\mathbf{a}|$, som ønsket.

b) Anta først at $|\mathbf{a}| = 0$. Hvis vi fortsatt lar $\mathbf{a} = [x, y]$, har vi da fra setning 3 at $|\mathbf{a}| = \sqrt{x^2 + y^2} = 0$. Hvis $x \neq 0$, følger det at $\sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{x^2} > 0$, som er en selvmotsigelse. Tilsvarende hvis $y \neq 0$. Altså må $[x, y] = [0, 0]$, som ifølge oppgave 11 er lik vektoren $\mathbf{0}$.
Hvis vi nå antar at $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, følger det fra oppgave 11 at $\mathbf{a} = [0, 0]$, og fra setning 3 følger det umiddelbart at $|\mathbf{a}| = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$.

Oppgave 20

a) Fra beviset av lemma 8 ser vi at det holder å vise at $|\mathbf{a}|\cos(\theta_{\mathbf{a}}) + |\mathbf{b}|\cos(\theta_{\mathbf{b}}) = |\mathbf{a} + \mathbf{b}|\cos(\theta_{\mathbf{a+b}})$. Problemet i denne oppgaven er at at $\cos(\theta_{\mathbf{b}}) < 0$.
Fra trigonometrien vet vi at $\cos(180° - \theta_{\mathbf{b}}) = -\cos(\theta_{\mathbf{b}})$. Dette medfører at $|\mathbf{b}|\cos(\theta_{\mathbf{b}})$ får negativt fortegn, men har samme lengde som $|\mathbf{b}|\cos(180° - \theta_{\boldsymbol{b}})$. Vi ser dette i den andre figuren under oppgaveteksten.
Hvis vi definerer lengdene $k_{\mathbf{a}}$, $k_{\mathbf{b}}$ og $k_{\boldsymbol{a+b}}$ som i beviset av lemma 8, ser vi at lengden av disse er gitt ved lengden til henholdsvis $|\mathbf{a}|\cos(\theta_{\boldsymbol{a}})$, $|\mathbf{b}|\cos(\theta_{\boldsymbol{b}})$ og $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|\cos(\theta_{\mathbf{a+b}})$ (det følger fra definisjonen på cosinus, og er forklart i beviset). Siden $|\mathbf{b}|\cos(\theta_{\boldsymbol{b}})$ er negativ, ser vi nå tydelig fra figuren under oppgaveteksten at $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|\cos(\theta_{\mathbf{a+b}}) = |\mathbf{a}|\cos(\theta_{\boldsymbol{a}}) + |\mathbf{b}|\cos(\theta_{\mathbf{b}})$.

b) I dette tilfellet er både $\cos(\theta_{\mathbf{a}})$ og $\cos(\theta_{\boldsymbol{b}})$ negative. Som i a)-oppgaven har vi at lengden til $|\mathbf{a}|\cos(\theta_{\mathbf{a}})$ og $|\mathbf{b}|\cos(\theta_{\mathbf{b}})$ er henholdsvis $|\mathbf{a}|\cos(180° - \theta_{\mathbf{a}})$ og $|\mathbf{b}|\cos(180° - \theta_{\mathbf{b}})$. Vi lar lengdene $k_{\mathbf{a}}$, $k_{\mathbf{b}}$ og $k_{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}$ være som i a)-oppgaven, og det går nå klart frem fra figuren under oppgaveteksten at $k_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}$ er summen av $k_{\mathbf{a}}$ og $k_{\mathbf{b}}$. I størrelse må derfor $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|\cos(\theta_{\mathbf{a}+\mathbf{b}})$ være summen av $|\mathbf{a}|\cos(\theta_{\mathbf{a}})$ og $|\mathbf{b}|\cos(\theta_{\mathbf{b}})$. Siden alle tre er negative, følger resultatet.

Oppgave 21

a) La $\overrightarrow{AD} = [s, t]$. Vi har da at $[4, 0] \cdot [s, t] = 4s = 4 \cdot 2 \cdot \cos(60°) = 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 4$, slik at $s = 1$. Videre er $\sqrt{s^2 + t^2} = 2$, slik at vi får $s^2 + t^2 = 1 + t^2 = 4$, og dermed $t = \pm\sqrt{3}$. Siden $ABCD$ går i positiv omløpsretning, følger det at $t = \sqrt{3}$ og $\overrightarrow{AD} = [1, \sqrt{3}]$.

b) La $\overrightarrow{AD} = [s, t]$. Vi har at $[5, 1] \cdot [s, t] = 5s + t = \sqrt{26} \cdot 1 \cdot \cos(45°) = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{2}} = \sqrt{13}$. Videre er $\sqrt{s^2 + t^2} = 1$, slik at vi får $s^2 + t^2 = 1$. Første ligning gir $t = \sqrt{13} - 5s$, og innsatt i den andre ligningen får vi $s^2 + \left(\sqrt{13} - 5s\right)^2 = s^2 + 13 - 10\sqrt{13}s + 25s^2 = 1$. Vi trekker sammen og får $26s^2 - 10\sqrt{13}s + 12 = 0$. Andregradsformelen gir $s = \frac{10\sqrt{13} \pm \sqrt{100 \cdot 13 - 4 \cdot 26 \cdot 12}}{2 \cdot 26}$, hvilket gir oss $s = \frac{2}{\sqrt{13}}$ eller $s = \frac{3}{\sqrt{13}}$. Vi setter inn i den første ligningen og får $t = \frac{3}{\sqrt{13}}$ eller $t = -\frac{2}{\sqrt{13}}$. Det er klart at vi må ha $[s, t] = [\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}]$, siden $\overrightarrow{AB} = [5, 1]$ og $ABCD$ går i positiv omløpsretning.

c) La $\overrightarrow{AD} = [s, t]$. Vi har at $[3, -4] \cdot [s, t] = 3s - 4t = \sqrt{25} \cdot 4 \cdot \cos(30°) = \frac{20 \cdot \sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$. Videre er $\sqrt{s^2 + t^2} = 4$, slik at vi får $s^2 + t^2 = 16$. Første ligning gir $t = \frac{3}{4}s - \frac{5}{2}\sqrt{3}$, og innsatt i den andre ligningen får vi $s^2 + \left(\frac{3}{4}s - \frac{5}{2}\sqrt{3}\right)^2 = s^2 + \frac{9}{16}s^2 - \frac{15}{4}\sqrt{3}s + \frac{75}{4} = 16$. Vi trekker sammen og får $\frac{25}{16}s^2 - \frac{15}{4}\sqrt{3}s + \frac{11}{4} = 0$. Andregradsformelen gir $s = \frac{15\sqrt{3}/4 \pm \sqrt{675/16 - 4 \cdot (25/16) \cdot (11/4)}}{2 \cdot 25/16}$. Vi får ingen pene svar ut av dette, så vi runder av og får $s \approx 3{,}68$ eller $s \approx 0{,}48$. Vi setter inn i den første ligningen og får $t \approx -1{,}57$ eller $t \approx -3{,}97$. Det er klart at vi må ha $[s, t] = [3{,}68, -1{,}57]$, siden $\overrightarrow{AB} = [3, -4]$ og $ABCD$ går i positiv omløpsretning.

Oppgave 22

Vi utnytter at AC har samme lengde som CB og at trekanten dermed er likebeinet. Vi regner ut skalarproduktet av $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$ med $\overrightarrow{AB}$ og får $\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$. Venstre side gir oss (ved å bruke den distributive loven og at $\left|\overrightarrow{AC}\right| = |\overrightarrow{CB}|$) uttrykket $2 \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \cos(45°) = \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot 15 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$, og høyre side gir oss $7{,}5^2$. Altså er $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \frac{7{,}5^2 \cdot \sqrt{2}}{15} \approx 5{,}3$.

Oppgave 23

a) Retningsvektorer er $\mathbf{a} = [1,2]$ og $\mathbf{b} = [1,1]$. Vi har $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{5}$ og $|\mathbf{b}| = \sqrt{2}$. Vinkelen blir da $\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|} = \cos^{-\mathbf{1}}\left(\frac{3}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}}\right) \approx 18{,}4°$.

b) Retningsvektorer er $\mathbf{a} = [1,-3]$ og $\mathbf{b} = [2,1]$. Vi har $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{10}$ og $|\mathbf{b}| = \sqrt{3}$. Vinkelen blir da $\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|} = \cos^{-\mathbf{1}}\left(\frac{-1}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{3}}\right) \approx 100{,}5°$.

c) Retningsvektorer er $\mathbf{a} = [1,-3]$ og $\mathbf{b} = [3,1]$. Vi ser her at $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 3 - 3 = 0$, og dermed må vinkelen mellom $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ være $90°$.

d) Retningsvektorer er $\mathbf{a} = [1,-5]$ og $\mathbf{b} = [1,5]$. Vi har $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{26}$ og $|\mathbf{b}| = \sqrt{26}$. Vinkelen blir da $\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|} = \cos^{-\mathbf{1}}\left(\frac{-24}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{26}}\right) \approx 157{,}4°$.

Oppgave 24

a) Retningsvektor for $f(x)$ er $\mathbf{v} = [1,1]$. La $\mathbf{w} = [1,-1]$. Da er $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = 0$, så $\mathbf{w}$ står normalt på $\mathbf{v}$. Vektoren $\mathbf{w}$ er retningsvektor til linjen $y = -x + b$, hvor b er en konstant. Fordi linjen går gjennom $P = (0,5)$, må $b = 5$. Altså: $y = -x + 5$.

b) Retningsvektor for $f(x)$ er $\mathbf{v} = [-4,1]$. La $\mathbf{w} = [1,4]$. Da er $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = 0$, så $\mathbf{w}$ står normalt på $\mathbf{v}$. Vektoren $\mathbf{w}$ er retningsvektor til linjen $y = 4x + b$, hvor b er en konstant. Fordi linjen går gjennom $P = (1,7)$, må vi ha $y - 7 = 4(x - 1)$, slik at linjen er gitt ved $y = 4x + 3$.

c) Retningsvektor for $f(x)$ er $\mathbf{v} = [5,1]$. La $\mathbf{w} = [1,-5]$. Da er $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = 0$, så $\mathbf{w}$ står normalt på $\mathbf{v}$. Vektoren $\mathbf{w}$ er retningsvektor til linjen $y = -5x + b$, hvor b er en konstant. Fordi linjen går gjennom $P = (3,-1)$, må vi ha $y + 1 = -5(x - 3)$, slik at linjen er gitt ved $y = -5x + 14$.

Oppgave 25

Retningsvektor for $f(x)$ er $\mathbf{v} = [1,-2]$. La $\mathbf{w} = [2,1]$. Da er $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = 0$, så $\mathbf{w}$ står normalt på $\mathbf{v}$. Vektoren $\mathbf{w}$ er retningsvektor til alle linjer på formen $y = \frac{1}{2}x + b$ hvor b er en konstant. Altså vil alle linjer på formen $y = \frac{1}{2}x + b$ stå normalt på $f(x)$.

Oppgave 26

a) $y = x + b$ for alle b.
b) $y = 5x + b$ for alle b.
c) $y = -3x + b$ for alle b.
d) $y = -3x + b$ for alle b.
e) $y = b$ for alle b.
f) $y = ax + b$ for alle b.
g) $x = c$ for alle c.

Oppgave 27

Det finnes uendelig mange retningsvektorer til enhver linje.

a) $[c, 2c]$ for alle $c \neq 0$.
b) $[c, 2c]$ for alle $c \neq 0$.
c) $[c, -2c]$ for alle $c \neq 0$.
d) $[c, 3c]$ for alle $c \neq 0$.
e) $[c, ac]$ for alle $c \neq 0$.

Oppgave 28

Vi finner først $\mathbf{a_b} = \overrightarrow{AB}$ ved å projisere $\mathbf{a} = \overrightarrow{AC}$ ned på den gitte linjen, med retningsvektor $\mathbf{b}$. Deretter finner vi B ved å flytte fra A langs $\overrightarrow{AB}$.

a) $\mathbf{a} = [1, 6]$ og $\mathbf{b} = [1, 2]$. Da er $\mathbf{a_b} = \frac{13}{5} \cdot [1, 2] = \left[\frac{13}{5}, \frac{26}{5}\right]$. Det følger at $B = \left(1 + \frac{13}{5}, 1 + \frac{26}{5}\right) = \left(\frac{18}{5}, \frac{31}{5}\right)$.

b) $\mathbf{a} = [3, 0]$ og $\mathbf{b} = [1, -3]$. Da er $\mathbf{a_b} = \frac{3}{10} \cdot [1, -3] = \left[\frac{3}{10}, \frac{-9}{10}\right]$. Det følger at $B = \left(3 + \frac{3}{10}, -2 - \frac{9}{10}\right) = \left(\frac{33}{10}, \frac{-29}{10}\right)$.

c) Vi har $\boldsymbol{b} = [1, -1]$. Vi kan la $A = (x, y)$, men siden dette punktet ligger på linjen $y = -x + 1$, kan vi sette $A = (x,\ -x + 1)$. Vi får da $\mathbf{a} = [4 - x, 8 + x - 1] = [4 - x, x + 7]$. Da er $\mathbf{a_b} = \frac{4-x-7-x}{2} \cdot [1, -1] = \left[-\frac{3}{2} - x,\ \frac{3}{2} + x\right]$. Det følger at $B = \left(x - \frac{3}{2} - x, -x + 1 + \frac{3}{2} + x\right) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

Oppgave 29

a) La $O = (0, 2)$, $\mathbf{b} = [1, -5]$, $\mathbf{a} = \overrightarrow{OP} = [1, -1]$ og $\overrightarrow{OQ} = \mathbf{a_b}$. Da er $\mathbf{a_b} = \frac{6}{26} \cdot [1, -5] = \left[\frac{3}{13}, -\frac{15}{13}\right]$, slik at $Q = \left(\frac{3}{13}, 2 - \frac{15}{13}\right) = \left(\frac{3}{13}, \frac{11}{13}\right)$. Det følger at normalen fra P ned på linjen er $\overrightarrow{PQ} = \left[\frac{3}{13} - 1, \frac{11}{13} - 1\right] = \left[-\frac{10}{13}, -\frac{2}{13}\right]$. Avstanden fra P til linjen er dermed $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{\frac{10^2}{13^2} + \frac{2^2}{13^2}} \approx 0{,}78$.

b) La $O = (0, 1)$, $\mathbf{b} = [1, 3]$, $\mathbf{a} = \overrightarrow{OP} = [-1, -5]$ og $\overrightarrow{OQ} = \mathbf{a_b}$. Da er $\mathbf{a_b} = \frac{-16}{10} \cdot [1, 3] = \left[-\frac{8}{5}, -\frac{24}{5}\right]$, slik at $Q = \left(-\frac{8}{5}, 1 - \frac{24}{5}\right) = \left(-\frac{8}{5}, -\frac{19}{5}\right)$. Det følger at normalen fra P ned på linjen er $\overrightarrow{PQ} = \left[-\frac{8}{5} + 1,\ -\frac{19}{5} + 4\right] = \left[-\frac{3}{5},\ \frac{1}{5}\right]$. Avstanden fra P til linjen er dermed $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{1}{25}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$.

c) La $O = (0, 8)$, $\mathbf{b} = [1, 1]$, $\mathbf{a} = \overrightarrow{OP} = [5, -15]$ og $\overrightarrow{OQ} = \mathbf{a_b}$. Da er $\mathbf{a_b} = \frac{-10}{2} \cdot [1, 1] = [-5, -5]$, slik at $Q = (-5,\ 8 - 5) = (-5,\ 3)$. Det følger at normalen fra P ned på linjen er $\overrightarrow{PQ} = [-5 - 5,\ 3 + 7] = [-10,\ 10]$. Avstanden fra P til linjen er dermed $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$.

Oppgave 30

a) Hvis $\theta > 90°$, vet vi at $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} < 0$, siden $\cos(\theta) < 0$. Men siden $\mathbf{a} \cdot (-\mathbf{b}) = -(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$, medfører det at $\mathbf{a} \cdot (-\mathbf{b}) > 0$, og dermed må også $\cos(\psi) > 0$, hvor ψ er vinkelen mellom $\mathbf{a}$ og $-\mathbf{b}$. Altså må ψ være mellom $-90°$ og $90°$.

b) Projeksjonen av $\mathbf{a}$ ned på $-\mathbf{b}$ er definert som vektoren $\mathbf{a_{-b}}$ parallell med $-\mathbf{b}$ slik at $\mathbf{a} - \mathbf{a_{-b}}$ står $90°$ på $-\mathbf{b}$. Men siden $-\mathbf{b}$ er parallell med $\mathbf{b}$, er det klart at $\mathbf{a} - \mathbf{a_{-b}}$ da også står normalt på $\mathbf{b}$, og i tillegg medfører dette at $\mathbf{a_{-b}}$ er parallell med $\mathbf{b}$. Det følger dermed av definisjonen at $\mathbf{a_{-b}} = \mathbf{a_b}$.

c) Vi har $\left(\frac{\mathbf{a}\cdot(-\mathbf{b})}{(-\mathbf{b})^2}\right)(-\mathbf{b}) = \left((-1)\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{(-1)^2\mathbf{b}^2}\right)(-1)(\mathbf{b}) = (-1)^2\left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{b}^2}\right)\mathbf{b} = \left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{b}^2}\right)\mathbf{b}$.

Oppgave 31

a) Vi har $\overrightarrow{AB} = [4, 0]$. Da er $\boldsymbol{n} = [0, 4]$. Vi har $\mathbf{b} = \overrightarrow{AC} = [2, 3]$, og dermed er arealet av trekanten $\frac{1}{2} \cdot (0 + 12) = 6$.

b) Vi har $\overrightarrow{AB} = [3, 6]$. Da er $\mathbf{n} = [-6, 3]$. Vi har $\mathbf{b} = \overrightarrow{AC} = [2, 4]$, og dermed er arealet av trekanten $\frac{1}{2} \cdot (12 - 12) = 0$. Dette får vi bekreftet hvis vi tegner inn punktene i et koordinatsystem: De ligger på samme linje.

c) Vi har $\overrightarrow{AB} = [5, 1]$. Da er $\boldsymbol{n} = [-1, 5]$. Vi har $\mathbf{b} = \overrightarrow{AC} = [3, 3]$, og dermed er arealet av trekanten $\frac{1}{2} \cdot (-3 + 15) = 6$.

Oppgave 32

a) $\mathbf{a} = \overrightarrow{BC} = [-2, 3]$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{AC} = [2, 3]$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{AB} = [4, 0]$. $A = \cos^{-1}\left(\frac{13-13-16}{-2\cdot\sqrt{13}\cdot 4}\right) \approx 56{,}3°$. Fordi $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$, da er trekanten likebenet, så $\angle B = \angle A \approx 56{,}3°$. Det følger at $\angle C \approx 180° - 2 \cdot 123{,}7° = 67{,}4°$.

b) $\mathbf{a} = \overrightarrow{BC} = [-1, -2]$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{AC} = [2, 4]$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{AB} = [3, 6]$. $A = \cos^{-1}\left(\frac{5-20-45}{-2\cdot\sqrt{20}\cdot\sqrt{45}}\right) = \cos^{-1}(1)$. Dette medfører at *A* er 0°. Vi husker fra oppgave 31 b) at *A*, *B* og *C* lå langs en rett linje, med *A* og *B* som endepunkter, og dermed passer dette resultatet godt inn.

$B = \cos^{-1}\left(\frac{20-5-45}{-2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{45}}\right) = \cos^{-1}(1)$, hvilket gir oss $\angle B = 0°$.

$C = \cos^{-1}\left(\frac{45-5-20}{-2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{20}}\right) = \cos^{-1}(-1)$, hvilket gir oss $\angle C = 180°$.

c) $\mathbf{a} = \overrightarrow{BC} = [-2, 2]$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{AC} = [3, 3]$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{AB} = [5, 1]$. $A = \cos^{-1}\left(\frac{8-18-26}{-2\cdot\sqrt{18}\cdot\sqrt{26}}\right) \approx 33{,}7°$.

$B = \cos^{-1}\left(\frac{18-8-26}{-2\cdot\sqrt{8}\cdot\sqrt{26}}\right) \approx 56{,}3°$.

$C = \cos^{-1}\left(\frac{26-8-18}{-2\cdot\sqrt{8}\cdot\sqrt{18}}\right) = 90°$.

Merk at siden $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$, kunne vi også derfra sett at $\angle C = 90°$.

Oppgave 33

a) $A' = (0, 1)$, $B' = (0, 5)$, $C' = (4, 3)$. Speiling om linjen $y = x$, siden denne linjen avbildes på seg selv.
b) $A' = (-1, 0)$, $B' = (-5, 0)$, $C' = (-3, -4)$. Rotasjon $180°$ om origo, siden origo avbildes på seg selv.
c) $A' = (0, -1)$, $B' = (0, -5)$, $C' = (-4, -3)$. Speiling om linjen $y = -x$, siden ethvert punkt $(a,\ -a)$ avbildes til seg selv.
d) $A' = (0, 1)$, $B' = (0, 5)$, $C' = (-4, 3)$. Rotasjon 90° om origo.
e) $A' = (2, 4)$, $B' = (2, 8)$, $C' = (6, 6)$. Glidespeiling. Først speiling om linjen $y = x$. Deretter parallellforskyvning langs vektoren $[2, 3]$.

Oppgave 34

a) $U(x, y) = (-y, -x)$
b) $U(x, y) = (-y, x)$
c) $U(x, y) = (-y + 3, -x - 5)$
d) $U(x, y) = (x, -y + 2)$
e) $U(x, y) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y, \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y\right)$
f) $U(x, y) = \left(\frac{1}{2}(x-1) - \frac{\sqrt{3}}{2}(y-1) + 1, \frac{\sqrt{3}}{2}(x-1) + \frac{1}{2}y(y-1) + 1\right)$

Oppgave 35

Rotasjon 180° om punktet.

Oppgave 36

a) Den første avbildningen sender (x, y) til $(x + 2, -y + 1)$. Den andre sender (x, y) til $(x + 2, -y - 1)$. Forskjellen er -2 i y-koordinaten.

b) Den første avbildningen sender (x, y) til $(x + 2, -y)$. Tilsvarende for den andre avbildningen. Her er det ingen forskjell. Forskjellen i avbildningen er at vektoren som bestemmer parallellforskyvningen, er parallell med x-aksen.

c) Hvis vektoren som bestemmer parallellforskyvningen, er parallell med speilingslinjen, spiller det ingen rolle hvilken rekkefølge man setter sammen speilingen og parallellforskyvningen.

Oppgave 37

a) La $P = (5, 0)$ og P' være rotasjonen av P $30°$ om origo. La O være origo.

Fordi $(1, 0)$ ligger på linjestykket OP, da må også $(\cos(30°), \sin(30°))$ ligge på linjestykket OP'. (Vi bruker her at linjestykker avbildes på linjestykker.) Det følger altså at $(5, 0)$ må avbildes på et multippel av $(\cos(30°), \sin(30°))$.

Fordi lengden på OP er 5, må også OP' ha lengden 5, og det følger det nå umiddelbart at P' må være på formen $5 \cdot (\cos(30°), \sin(30°))$, siden dette gjør at lengden på OP' da er lik $\sqrt{5^2 \cdot (\cos^2(30°) + \sin^2(30°))} = 5$. Vi bruker her at $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ for enhver vinkel θ.

Tilsvarende argumentasjon for $Q = (0, 3)$. La Q' være bildet av Q under rotasjonen $30°$ om origo. Siden $(0, 1)$ ligger på linjestykket OQ, da må $(-\sin(30°), \cos(30°))$ ligge på linjestykket OQ'. Altså må Q' være et multippel av $(-\sin(30°), \cos(30°))$. Siden OQ' må ha lengden 3, og vi har at $\sqrt{3^2 \cdot (\sin^2(30°) + \cos^2(30°))} = 3$, følger resultatet.

b) La $A = (5, 3)$, og betrakt den rettvinklede trekanten ΔOPA. Vi finner koordinatene til A ved å addere $\overrightarrow{OP}$ med $\overrightarrow{PA}$. Merk at $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{OQ}$. Tilsvarende finner vi koordinatene til A' ved å addere $\overrightarrow{OP'}$ med $\overrightarrow{P'A'}$. Vi har fortsatt at $\overrightarrow{P'A'} = \overrightarrow{OQ'}$, siden lengder og vinkler mellom linjestykker bevares under alle kongruensavbildninger. Dette medfører at vi finner A' ved å addere $5 \cdot (\cos(30°), \sin(30°))$ med $3 \cdot (-\sin(30°), \cos(30°))$. Resultatet følger.

Oppgave 38

a) $U(x, y) = (-x, -y)$. Rekkefølgen spiller ingen rolle.
b) $U(x, y) = (-y + 2, x + 3)$. Rekkefølgen spiller en rolle, siden vi ellers ville fått $(-y - 3, x + 2)$. Dette gjelder enhver vektor $\neq \mathbf{0}$.
c) $U(x, y) = (-y, -x)$. Rekkefølgen spiller en rolle, siden vi ellers ville fått (y, x). (Vi kan tenke oss at speilingslinjen også ville måttet roteres hvis vi først roterte og deretter speilet og ønsket samme resultat.)

d) $U(x, y) = (-y, -x)$. Her spiller rekkefølgen ingen rolle. Hvis vi sammenligner med c)-oppgaven, ser vi her at speilingslinjen under rotasjon $180°$ om origo avbildes til seg selv. Dermed vil først rotasjon og deretter speiling om linjen $y = x$ gi samme resultat.

Oppgave 39

Sammensetningen i a) er rotasjon $180°$ om origo. I både c)- og d)-oppgaven har vi speiling om linjen $y = -x$.

Oppgave 40

a) Speiling om linjen $y = x$, etterfulgt av parallellforskyvning langs vektoren $[2, 3]$.
b) Speiling om linjen $y = 0$, etterfulgt av parallellforskyvning langs vektoren $[2, -4]$.
c) Speiling om linjen $y = -x$, etterfulgt av parallellforskyvning langs vektoren $[-1, 0]$.
d) Dette er egentlig rotasjon $180°$ om origo, men kan også uttrykkes som en sammensetning av speiling om $y = 0$ og speiling om $x = 0$.

Oppgave 41

La $U(P) = P_1$, $V(P_1) = P_2$ og $W(P_2) = P'$. Da vil $W \circ (V \circ U)$ først sende P til $(V \circ U)(P) = V\big(U(P)\big) = V(P_1) = P_2$, og deretter sender W P_2 til P'. På den annen side har vi at $(W \circ V) \circ U$ først sender P til $U(P) = P_1$, og deretter sender $W \circ V$ P_1 til $W\big(V(P_1)\big) = W(P_2) = P'$. Altså er $W \circ (V \circ U) = (W \circ V) \circ U$.

Oppgave 42

a) Like (dette er en parallellforskyvning)
b) Odde (dette er en glidespeiling)
c) Like (sammensetning av rotasjon og parallellforskyvning)
d) Like (dette er en rotasjon)

Oppgave 43

Parallellforskyvning: Like. Avbilder ingen punkter på seg selv.

Rotasjon: Like. Avbilder nøyaktig ett punkt på seg selv.

Glidespeiling: Odde. Avbilder ingen punkter på seg selv.

Oppgave 44

MERK: Trykkfeil i slutten av hintet. Det skal multipliseres med V på hver side av likhetstegnet til slutt.

MERK: Det er en unøyaktighet i figur 52. Der skal avstanden mellom $U \circ V(P)$ og linjen n være like stor som avstanden mellom $V(P)$ og linjen n.

Bevis (i): Bruk samme figur som figur 52, men kall speiling om m for U og speiling om n for V. Vi ser da klart at $W = V \circ U$. Ved å multiplisere med V på hver side av likhetstegnet, får vi at $V \circ W = U$.

Bevis (ii): Vi velger speilinger Z_1 og Z_2 slik at $Z_2 \circ Z_1 = W$, akkurat som i beviset av korollar 21 ii), men med den forskjell av vi velger speilingslinjen til Z_2 slik at denne er parallell med m. Vi multipliserer nå med V på begge sider av likhetstegnet slik at vi får $V \circ Z_2 \circ Z_1 = V \circ W$. Siden speilingslinjen til V er parallell med speilingslinjen til Z_2, følger det fra setning 19 at $V \circ Z_2$ er en parallellforskyvning. Kall den for P. Vi har da at $P \circ Z_1 = V \circ W$, og dermed er $V \circ W$ en glidespeiling.

Oppgave 45

La A, B og C gå i positiv omløpsretning. Hvis U og V er like, da vil $U(A), U(B), U(C)$ gå i positiv omløpsretning, og dermed vil også $(V \circ U)(A), (V \circ U)(B), (V \circ U)(C)$. Hvis U og V begge er odde, da vil $U(A), U(B), U(C)$ gå i negativ omløpsretning, og dermed vil $(V \circ U)(A), (V \circ U)(B), (V \circ U)(C)$ gå i positiv omløpsretning. Hvis U er like og V odde, da vil $U(A), U(B), U(C)$ gå i positiv omløpsretning, og dermed $(V \circ U)(A), (V \circ U)(B), (V \circ U)(C)$ gå i negativ omløpsretning. Hvis U er odde og V like, da vil $U(A), U(B), U(C)$ gå i negativ omløpsretning, og dermed vil også $(V \circ U)(A), (V \circ U)(B), (V \circ U)(C)$ gå i negativ omløpsretning.

Oppgave 46

a) Tilfellet beskrevet av figuren øverst til venstre: $\Delta P'PO$ og $\Delta P''OP'$ består begge av to kongruente trekanter, og det følger da at $P''O = PO$.

   La $P'P$ skjære m i Q, og $P'P''$ skjære n i Q'. Da ser vi at $\angle P'OQ + \angle Q'OP' = 180° - v$. Siden $\angle P'OP = 2 \cdot \angle P'OQ$ og $P''OP' = 2 \cdot \angle Q'OP'$, følger det at $\angle P''OP = 360° - 2v$. Altså er $\angle POP'' = 2v$.

   Tilfellet beskrevet av figuren øverst til høyre: Kall skjæringspunktet mellom m og n for O. Ved å betrakte kongruente trekanter ser vi at $PO = P''O$.

La $P'P$ skjære m i Q, og $P'P''$ skjære n i Q'. Da ser vi at $\angle QOP' + \angle P'OQ' = v$. Siden $\angle POP' = 2 \cdot \angle QOP'$ og $P'OP'' = 2 \cdot \angle P'OQ'$, følger det at $\angle POP'' = 2v$.

Tilfellet beskrevet av figuren nederst: Ved å betrakte kongruente trekanter ser vi at $PO = P''O$.

La $P'P$ skjære m i Q, og $P'P''$ skjære n i Q'. Da ser vi at $\angle P'OQ + \angle Q'OP' = 180° - v$. Siden $\angle P'OP = 2 \cdot \angle P'OQ$ og $P''OP' = 2 \cdot \angle Q'OP'$, følger det at $\angle P''OP = 360° - 2v$. Altså er $\angle POP'' = 2v$.

b) Figuren øverst til venstre: La P ha avstand e til m. Da har P' avstand $d - e$ til n. Avstanden fra P til P' er $2e$, og avstanden fra P' til P'' er $2(d - e)$. Avstanden fra P til P'' er da $2e + 2(d - e) = 2d$.

   Figuren øverst til høyre: La P ha avstand e til m. Da har P' avstand $e - d$ til n. Avstanden fra P til P' er $2e$, og avstanden fra P' til P'' er $2(e - d)$. Avstanden fra P til P'' er da $2e - 2(e - d) = 2d$.

   Figuren nederst til venstre og nederst til høyre: La P ha avstand e til m. Da har P' avstand $e + d$ til n. Avstanden fra P til P' er $2e$, og avstanden fra P' til P'' er $2(e + d)$. Avstanden fra P til P'' er da $2(e + d) - 2e = 2d$.

Oppgave 46

Dette er tilsvarende konstruksjon som vi finner vist i figur 56 og 57. Eneste forskjell er at A', B', C' går i negativ omløpsretning. Men ved å konstruere sirkler med sentrum i A', B' og C', med radius lik henholdsvis DA, DB og DC, vil sirklene skjære i ett punkt, og det er der D' skal befinne seg.

Oppgave 47

a) Trekk et linjestykke fra A til A', og lag en midtnormal. Kall midtnormalen for L_1. Begynn med å speile den høyre trekanten om L_1. Dette gir deg en ny trekant der bildet av A' sammenfaller med A, og vi har en figur som ligner på den i figur 58, til venstre. Kall bildet av $U(B)$ for B', slik det er gjort i figur 58 til venstre. Speilingen vi har foretatt, kaller vi for S_1.

   Trekk et linjestykke fra B' til B, lag en midtnormal, kall midtnormalen for L_2, og speil den nye trekanten om L_2. Du vil nå oppleve at den nye trekanten sammenfaller totalt med ΔABC. Kall bildet av det som opprinnelig var $U(C)$, for C'. Speilingen vi har foretatt, kaller vi for S_2.

Siste steg faller vekk i dette tilfellet, siden C' sammenfaller med C, så vi får ingen speiling S_3.

Avbildningen er gitt ved $S_1 \circ S_2$, og dette tilsvarer en rotasjon (på figuren i boken ser vi klart at dette ikke er en parallellforskyvning). Rotasjonssentrum er skjæringspunktet til L_1 og L_2. Rotasjonsvinkelen er følgende: Definer v til å være vinkelen L_1 danner med L_2, hvor vi begynner i L_2 og måler mot klokken til vi kommer til L_1. Da er rotasjonsvinkelen $2v$.

b) På denne figuren kan vi hoppe over første skritt, altså det som ville vært gitt som S_1. Kall $U(B)$ for B'. Slik det er beskrevet i figur 58 til venstre, trekker vi et linjestykke fra B til B', lager en midtnormal som vi kaller for L_2, speiler om L_2, og får en figur som ligner den vi ser til høyre i figur 58. Kall speilingen vi nettopp har foretatt, for S_2.

   Tilslutt speiler vi om linjen AB, og kaller speilingen for S_3.

   Avbildningen er gitt ved $S_2 \circ S_3$. Dette er igjen en rotasjon, og rotasjonssentrum er i skjæringspunktet til L_2 og L_3. Hvis vi lar v være vinkelen L_2 danner med L_3 (der vi begynner langs L_3 og beveger oss mot klokken til vi kommer til L_2), da er rotasjonsvinkelen $2v$.

c) Dette er akkurat samme konstruksjon som i oppgave a). Vi ender igjen opp med $S_1 \circ S_2$. Forskjellen er her at L_1 og L_2 er parallelle, så vi får en parallellforskyvning. Merk at avstanden mellom L_1 og L_2 vil være halvparten av AA' (og de andre punktparene).

Oppgave 49

I dette tilfellet vil linjestykket som forbinder A med $U(A) = A'$, være likt AB, og midtnormalen L_1 vil gå gjennom C. Speilingen S_1 vil da sende $U(B)$ på B og $U(C)$ på C. Det følger da at både S_2 og S_3 faller vekk i denne konstruksjonen, og avbildningen er gitt ved speiling om L_1.

Trekanten er likesidet (slik det kommer frem i figurteksten), og dermed vil speiling om midtnormalen til BC gi samme resultat, og også speiling om midtnormalen til CA. I tillegg vil rotasjon $60°$ og $120°$ om trekantens midtpunkt også avbilde trekanten på seg selv.

Det må nevnes at man alltid regner identitetsavbildningen som en symmetri, *den trivielle symmetrien*.

Oppgave 50

a) Symmetrilinjer $y = 0$, $x = 0$, $y = x$ og $y = -x$.
$S_{y=0}(x, y) = (x, -y)$, $S_{x=0}(x, y) = (-x, y)$, $S_{y=x}(x, y) = (y, x)$, $S_{y=-x}(x, y) = (-y, -x)$.

b) Symmetrilinjer $x = n + \frac{1}{2}$, for alle $n \in \mathbb{Z}$.
$S_{x=n+½}(x, y) = (-x + 2n + 1,\ y)$.

c) Vi har $P_{[2,0]} \circ S_{x=n+½}(x, y) = (-x + 2n + 3, y)$.

Oppgave 51

a)

$\circ$	R_{90}	R_{180}	R_{270}
R_{90}	R_{180}	R_{270}	I
R_{180}	R_{270}	I	R_{90}
R_{270}	I	R_{90}	R_{180}

b)

$\circ$	$S_{y=0}$	$S_{x=0}$	$S_{y=x}$	$S_{y=-x}$
$S_{y=0}$	I	R_{180}	R_{90}	R_{270}
$S_{x=0}$	R_{180}	I	R_{270}	R_{90}
$S_{y=x}$	R_{270}	R_{90}	I	R_{180}
$S_{y=-x}$	R_{90}	R_{270}	R_{180}	I

Rekkefølgen spiller en rolle så lenge speilingslinjene danner en vinkel forskjellig fra 90°. Ifølge setning 19 i) vil en sammensetning av to speilinger tilsvare en rotasjon på $2v$, hvor v er vinkelen de to speilingslinjene danner, hvor vi måler fra den første speilingslinjen og mot klokken til vi kommer til den andre speilingslinjen. Dette betyr at hvis vi endrer på rekkefølgen, vil rotasjonen bli $360° - 2v$. Vi ser da at hvis $v = 90°$, gir $2v$ og $360° - 2v$ samme rotasjonsvinkel, nemlig 180°.

c)

$\circ$	R_{90}	R_{180}	R_{270}	$S_{y=0}$	$S_{x=0}$	$S_{y=x}$	$S_{y=-x}$
R_{90}	R_{180}	R_{270}	I	$S_{y=-x}$	$S_{y=x}$	$S_{y=0}$	$S_{x=0}$
R_{180}	R_{270}	I	R_{90}	$S_{x=0}$	$S_{y=0}$	$S_{y=-x}$	$S_{y=x}$
R_{270}	I	R_{90}	R_{180}	$S_{y=x}$	$S_{y=-x}$	$S_{x=0}$	$S_{y=0}$
$S_{y=0}$	$S_{y=x}$	$S_{x=0}$	$S_{y=-x}$	I	R_{180}	R_{90}	R_{270}
$S_{x=0}$	$S_{y=-x}$	$S_{y=0}$	$S_{y=x}$	R_{180}	I	R_{270}	R_{90}
$S_{y=x}$	$S_{x=0}$	$S_{y=-x}$	$S_{y=0}$	R_{270}	R_{90}	I	R_{180}
$S_{y=-x}$	$S_{y=0}$	$S_{y=x}$	$S_{x=0}$	R_{90}	R_{270}	R_{180}	I

Sammensetningen av en speiling og rotasjon blir en speiling, siden rotasjonssenteret ligger på speilingslinjen.

Vi finner f.eks. $R_{90} \circ S_{y=0}$ på følgende måte: La $R_{90} \circ S_{y=0} = U$, hvor U er ukjent. Hvis vi multipliserer med $S_{y=0}$ på begge sider, får vi $R_{90} = U \circ S_{y=0}$. Vi ser fra oppgave b) (evt. fra tabellen her hvis vi først fyller ut det vi kjenner fra oppgave a) og b)) at $S_{y=-x} \circ S_{y=0} = R_{90}$. Altså må $U = S_{y=-x}$.

Oppgave 52

a) Her er rotasjonssenteret $(0, -1)$. Merk at denne tabellen er kommutativ (rekkefølgen av sammensetningene spiller ingen rolle) siden alle rotasjonsvinklene er $180°$.

$\circ$	R_{180}	$S_{y=-1}$	$S_{x=0}$
R_{180}	I	$S_{x=0}$	$S_{y=-1}$
$S_{y=-1}$	$S_{x=0}$	I	R_{180}
$S_{x=0}$	$S_{y=-1}$	R_{180}	I

b) Vi har her selvsagt speilingen $S_{y=\frac{3}{2}}$. I tillegg til det finnes det uendelig mange andre symmetrier. For at ikke tabellen skal bli altfor komplisert, tar vi her kun med parallellforskyvningen $P_{[3,0]}$; rotasjonene $R_{\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)}$ og $R_{\left(2,\frac{3}{2}\right)}$, som er 180° med sentrum i henholdsvis $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ og $\left(2,\frac{3}{2}\right)$; og speilingene $S_{x=\frac{1}{2}}$ og $S_{x=2}$.

$\circ$	$R_{\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)}$	$R_{\left(2,\frac{3}{2}\right)}$	$S_{y=\frac{3}{2}}$	$S_{x=\frac{1}{2}}$	$S_{x=2}$	$P_{[3,0]}$
$R_{\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)}$	I	$P_{[3,0]}$	$S_{x=\frac{1}{2}}$	$S_{y=\frac{3}{2}}$	$G_{y=\frac{3}{2},[3,0]}$	$R_{\left(2,\frac{3}{2}\right)}$
$R_{\left(2,\frac{3}{2}\right)}$	$P_{[-3,0]}$	I	$S_{x=2}$	$G_{y=\frac{3}{2},[-3,0]}$	$S_{y=\frac{3}{2}}$	$R_{\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)}$
$S_{y=\frac{3}{2}}$	$S_{x=\frac{1}{2}}$	$S_{x=2}$	I	$R_{\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)}$	$R_{\left(2,\frac{3}{2}\right)}$	$G_{y=\frac{3}{2},[3,0]}$
$S_{x=\frac{1}{2}}$	$S_{y=\frac{3}{2}}$	$G_{y=\frac{3}{2},[3,0]}$	$R_{\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)}$	I	$P_{[3,0]}$	$G_{x=\frac{1}{2},[3,0]}$
$S_{x=2}$	$G_{y=\frac{3}{2},[-3,0]}$	$S_{y=\frac{3}{2}}$	$R_{\left(2,\frac{3}{2}\right)}$	$P_{[-3,0]}$	I	$G_{x=2,[3,0]}$
$P_{[3,0]}$	$R_{\left(-1,\frac{3}{2}\right)}$	$R_{\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)}$	$G_{y=\frac{3}{2},[3,0]}$	$G_{x=\frac{1}{2},[-3,0]}$	$G_{x=2,[-3,0]}$	$P_{[6,0]}$

c) Merk at dette kun er en utvidelse av figuren i b)-oppgaven. Igjen, for at ikke bildet skal bli for komplisert, tar vi kun med et utvalg som igjen genererer resten av de uendelig mange symmetriene gjennom sammensetninger. I dette tilfellet beholder vi avbildningene fra b)-oppgaven, og legger til $P_{[0,2]}$. Tabellen ser da slik ut:

$\circ$	$R_{\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)}$	$R_{\left(2,\frac{3}{2}\right)}$	$S_{y=\frac{3}{2}}$	$S_{x=\frac{1}{2}}$	$S_{x=2}$	$P_{[3,0]}$	$P_{[0,2]}$
$R_{\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)}$	I	$P_{[3,0]}$	$S_{x=\frac{1}{2}}$	$S_{y=\frac{3}{2}}$	$G_{y=\frac{3}{2},[3,0]}$	$R_{\left(2,\frac{3}{2}\right)}$	$R_{\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)}$
$R_{\left(2,\frac{3}{2}\right)}$	$P_{[-3,0]}$	I	$S_{x=2}$	$G_{y=\frac{3}{2},[-3,0]}$	$S_{y=\frac{3}{2}}$	$R_{\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)}$	$R_{\left(2,\frac{5}{2}\right)}$
$S_{y=\frac{3}{2}}$	$S_{x=\frac{1}{2}}$	$S_{x=2}$	I	$R_{\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)}$	$R_{\left(2,\frac{3}{2}\right)}$	$G_{y=\frac{3}{2},[3,0]}$	$G_{y=\frac{3}{2},[0,2]}$
$S_{x=\frac{1}{2}}$	$S_{y=\frac{3}{2}}$	$G_{y=\frac{3}{2},[3,0]}$	$R_{\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)}$	I	$P_{[3,0]}$	$G_{x=\frac{1}{2},[3,0]}$	$G_{x=\frac{1}{2},[0,2]}$
$S_{x=2}$	$G_{y=\frac{3}{2},[-3,0]}$	$S_{y=\frac{3}{2}}$	$R_{\left(2,\frac{3}{2}\right)}$	$P_{[-3,0]}$	I	$G_{x=2,[3,0]}$	$G_{x=2,[0,2]}$
$P_{[3,0]}$	$R_{\left(-1,\frac{3}{2}\right)}$	$R_{\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)}$	$G_{y=\frac{3}{2},[3,0]}$	$G_{x=\frac{1}{2},[-3,0]}$	$G_{x=2,[-3,0]}$	$P_{[6,0]}$	$P_{[3,2]}$
$P_{[0,2]}$	$R_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}$	$R_{\left(2,\frac{1}{2}\right)}$	$G_{y=\frac{3}{2},[0,-2]}$	$G_{x=\frac{1}{2},[0,2]}$	$G_{x=2,[0,2]}$	$P_{[3,2]}$	$P_{[0,4]}$

d) Her har vi rotering 90°, 180° og 270° om sentrum i stjernen. I tillegg har vi fire symmetrilinjer. Merk hvordan denne tabellen er helt lik i struktur som den vi hadde i oppgave 51 c).

$\circ$	R_{90}	R_{180}	R_{270}	$S_{y=\frac{1}{2}}$	$S_{x=1}$	$S_{y=x-\frac{1}{2}}$	$S_{y=-x+\frac{3}{2}}$
R_{90}	R_{180}	R_{270}	I	$S_{y=-x+\frac{3}{2}}$	$S_{y=x-\frac{1}{2}}$	$S_{y=\frac{1}{2}}$	$S_{x=1}$
R_{180}	R_{270}	I	R_{90}	$S_{x=1}$	$S_{y=\frac{1}{2}}$	$S_{y=-x+\frac{3}{2}}$	$S_{y=x-\frac{1}{2}}$
R_{270}	I	R_{90}	R_{180}	$S_{y=x-\frac{1}{2}}$	$S_{y=-x+\frac{3}{2}}$	$S_{x=1}$	$S_{y=\frac{1}{2}}$
$S_{y=\frac{1}{2}}$	$S_{y=x-\frac{1}{2}}$	$S_{x=1}$	$S_{y=-x+\frac{3}{2}}$	I	R_{180}	R_{90}	R_{270}
$S_{x=1}$	$S_{y=-x+\frac{3}{2}}$	$S_{y=\frac{1}{2}}$	$S_{y=x-\frac{1}{2}}$	R_{180}	I	R_{270}	R_{90}
$S_{y=x-\frac{1}{2}}$	$S_{x=1}$	$S_{y=-x+\frac{3}{2}}$	$S_{y=\frac{1}{2}}$	R_{270}	R_{90}	I	R_{180}
$S_{y=-x+\frac{3}{2}}$	$S_{y=\frac{1}{2}}$	$S_{y=x-\frac{1}{2}}$	$S_{x=1}$	R_{90}	R_{270}	R_{180}	I

Oppgave 53

a) En likesidet trekant. Hvis vi lar A, B, C gå i positiv omløpsretning, da lar vi symmetrilinjen m gå gjennom C, n gå gjennom A, og l gå gjennom B.
b) F.eks. en likebeinet trekant som ikke er likesidet.
c) F.eks. et parallellogram som ikke er en rombe, og der vinklene er $\neq 90°$.
d) En uendelig utstrekning av likebeinede trekanter.

Oppgave 54

i. La P være et punkt på figuren. Da må $V(P)$ også være et punkt på figuren, og da er igjen $U(V(P))$ et punkt på figuren. Altså avbilder $U \circ V$ figuren på seg selv, og er dermed pr. definisjon en symmetri.

ii. La P' være et punkt på figuren. Siden U avbilder figuren på seg selv, må det eksistere et punkt P på figuren slik at $U(P) = P'$. Men det betyr at $U^{-1}(P') = P$, som altså er et punkt på figuren. Altså er U^{-1} en symmetri.

iii. For ethvert punkt P på figuren er $I(P) = P$, som altså er et punkt på figuren. Altså er I en symmetri.

Oppgave 55

a) ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. Vi definerer f.eks. σ_{BAC} som omstokkingen som avbilder ABC på BAC, osv. Merk at σ_{BAC} er en omstokking som er definert som at den bytter om på de to første bokstavene. Det betyr at hvis bokstavene allerede er stokket om, f.eks. som CBA, da vil σ_{BAC} avbilde CBA på BCA.
Vi kaller σ_{ABC} for e, og betrakter dette som enhetselementet.

$\circ$	σ_{ACB}	σ_{BAC}	σ_{BCA}	σ_{CAB}	σ_{CBA}
σ_{ACB}	e				
σ_{BAC}	σ_{BCA}	e	σ_{ACB}	σ_{CBA}	σ_{CAB}
σ_{BCA}	σ_{BAC}	σ_{CBA}	σ_{CAB}	e	σ_{ACB}
σ_{CAB}	σ_{CBA}	σ_{ACB}	e	σ_{BCA}	σ_{BAC}
σ_{CBA}	σ_{CAB}	σ_{BCA}	σ_{BAC}	σ_{ACB}	e

b) Dette er tabellen vi finner i oppgave 53 a).

c) Betrakt A, B, C som hjørnene i trekanten. Da kan vi tenke på σ_{CAB} som rotasjon $60°$ og σ_{BCA} som rotasjon $120°$ (vi tenker oss at vi må rotere trekanten $120°$ for å legge B oppå A, C oppå B og A oppå C). Videre kan vi se på σ_{BAC} som speiling om linjen m (som går gjennom C i trekanten), σ_{CBA} som speiling om linjen l (som går gjennom B i trekanten), og σ_{ACB} som speiling om linjen n (som går gjennom A i trekanten). Vi ser da at f.eks. S_m satt sammen med R_{60} i tabellen i oppgave 53 a) gir oss S_l. Tilsvarende ser vi her at σ_{BAC} satt sammen med σ_{CAB} gir oss σ_{CBA}, som altså tilsvarte speiling om linjen l. Tilsvarende for de andre multiplikasjonsstykkene.

MERK! Trykkfeil i forkant av d)-oppgaven. S_4 har 24 elementer i seg, ikke 12.

d) De kan ikke ha samme struktur. Et kvadrat har fire symmetrilinjer og fire rotasjonssymmetrier (inkluder identitetsavbildningen), og dermed har D_8 totalt 8 elementer i seg.

e) Som før lar vi her e stå for identitetselementet.

$\circ$	σ_{DABC}	σ_{CDAB}	σ_{BCDA}	σ_{DCBA}	σ_{BADC}	σ_{ADCB}	σ_{CBAD}
σ_{DABC}	σ_{CDAB}	σ_{BCDA}	e	σ_{CBAD}	σ_{ADCB}	σ_{DCBA}	σ_{BADC}
σ_{CDAB}	σ_{BCDA}	e	σ_{DABC}	σ_{BADC}	σ_{DCBA}	σ_{CBAD}	σ_{ADCB}
σ_{BCDA}	e	σ_{DABC}	σ_{CDAB}	σ_{ADCB}	σ_{CBAD}	σ_{BADC}	σ_{DCBA}
σ_{DCBA}	σ_{ADCB}	σ_{BADC}	σ_{CBAD}	e	σ_{CDAB}	σ_{DABC}	σ_{BCDA}
σ_{BADC}	σ_{CBAD}	σ_{DCBA}	σ_{ADCB}	σ_{CDAB}	e	σ_{BCDA}	σ_{DABC}
σ_{ADCB}	σ_{BADC}	σ_{CBAD}	σ_{DCBA}	σ_{BCDA}	σ_{DABC}	e	σ_{CDAB}
σ_{CBAD}	σ_{DCBA}	σ_{ADCB}	σ_{BADC}	σ_{DABC}	σ_{BCDA}	σ_{CDAB}	e

f) Vi bruker figur 63 som utgangspunkt. Dette gir oss følgende sammensetningstabell:

$\circ$	R_{90}	R_{180}	R_{270}	$S_{y=0}$	$S_{x=0}$	$S_{y=x}$	$S_{y=-x}$
R_{90}	R_{180}	R_{270}	I	$S_{y=-x}$	$S_{y=x}$	$S_{y=0}$	$S_{x=0}$
R_{180}	R_{270}	I	R_{90}	$S_{x=0}$	$S_{y=0}$	$S_{y=-x}$	$S_{y=x}$
R_{270}	I	R_{90}	R_{180}	$S_{y=x}$	$S_{y=-x}$	$S_{x=0}$	$S_{y=0}$
$S_{y=0}$	$S_{y=x}$	$S_{x=0}$	$S_{y=-x}$	I	R_{180}	R_{90}	R_{270}
$S_{x=0}$	$S_{y=-x}$	$S_{y=0}$	$S_{y=x}$	R_{180}	I	R_{270}	R_{90}
$S_{y=x}$	$S_{x=0}$	$S_{y=-x}$	$S_{y=0}$	R_{270}	R_{90}	I	R_{180}
$S_{y=-x}$	$S_{y=0}$	$S_{y=x}$	$S_{x=0}$	R_{90}	R_{270}	R_{180}	I

Hvis vi gjør som i c)-oppgaven og betrakter omstokkingene som hva som skjer når vi snur om på kvadratet og legger den oppå seg selv (slik at σ_{DABC} tilsvarer R_{90}, f.eks.), da ser vi at R_{180} tilsvarer σ_{CDAB}, R_{270} tilsvarer σ_{BCDA}, $S_{y=0}$ tilsvarer σ_{CDBA}, $S_{x=0}$ tilsvarer σ_{BADC}, $S_{y=x}$ tilsvarer σ_{ADCB}, og $S_{y=-x}$ tilsvarer σ_{CBAD}. Vi ser da at de to sammensetningstabellene er identiske. (Det kan være at du selv må justere litt på rekkefølgen av elementene for å få samme struktur som vi har her.)

Oppgave 56

a) Vi har $[1,0] = -\frac{1}{5}([1,3] - 3 \cdot [2,1])$, som avbildes på $-\frac{1}{5}([4,12] - 3 \cdot [4,2]) = \left[\frac{8}{5}, -\frac{6}{5}\right]$, og vi har $[0,1] = -\frac{1}{5}([2,1] - 2 \cdot [1,3])$, som avbildes på $-\frac{1}{5}([4,2] - 2 \cdot [4,12]) = \left[\frac{4}{5}, 4\right]$. Altså er matrisen $\begin{pmatrix} \frac{8}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{6}{5} & 4 \end{pmatrix}$.

b) Vi har $[1,0] = \frac{1}{10}([4,12] + 3 \cdot [2,-4])$, som avbildes på $\frac{1}{10}([1,3] + 3 \cdot [1,-2]) = \left[\frac{2}{5}, -\frac{3}{10}\right]$, og vi har $[0,1] = \frac{1}{20}([4,12] - 2 \cdot [2,-4])$, som avbildes på $\frac{1}{20}([1,3] - 2 \cdot [1,-2]) = \left[-\frac{1}{20}, \frac{7}{20}\right]$. Altså er matrisen $\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{20} \\ -\frac{3}{10} & \frac{7}{20} \end{pmatrix}$.

c) Vi har $[1,0] = \frac{1}{5}(4 \cdot [1,2] + [1,-8])$, som avbildes på $\frac{1}{5}(4 \cdot [1,2] + [2,-16]) = \left[\frac{6}{5}, -\frac{8}{5}\right]$, og vi har $[0,1] = \frac{1}{10}([1,2] - [1,-8])$, som avbildes på $\frac{1}{10}([1,2] - [2,-16]) = \left[-\frac{1}{10}, \frac{9}{5}\right]$. Altså er matrisen $\begin{pmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{8}{5} & \frac{9}{5} \end{pmatrix}$.

Oppgave 57

$\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$, ikke egenvektor til matrisen.

$\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix}$, ikke egenvektor til matrisen.

$\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 16 \end{pmatrix}$, ikke egenvektor til matrisen.

$\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 8 \end{pmatrix}$, er en egenvektor. Egenverdien er 8, siden $8 \cdot [3,1] = [24,8]$.

$\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 24 \end{pmatrix}$, ikke egenvektor til matrisen.

$\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$, er en egenvektor. Egenverdien er 7.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, ikke egenvektor.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, er en egenvektor. Egenverdien er -1.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$, ikke egenvektor.

$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}\binom{2}{3} = \binom{8}{12}$, er en egenvektor. Egenverdien er 4.

$\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 4\end{pmatrix}\binom{1}{1} = \binom{2}{2}$, er en egenvektor. Egenverdien er 2.

$\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 4\end{pmatrix}\binom{1}{2} = \binom{3}{6}$, er en egenvektor. Egenverdien er 3.